数理解析研究所講究録
1109巻 1999年 118-128

On Burnside functors

小田 文仁 (ODA, FUMIHITO) *

1 はじめに

有限群 G の作用する有限集合のつくる圏の直和と直積に関する Grothendieck 環を G の Burnside 環 [Dr75] という．G のすべての部分群の Burnside 環から構成される Mackey functor [TW95] を Burnside functor という．Burnside functor は射影的であり，またすべての Mackey functor に対してテンサー積 ([Le81], [Lu96], [Bo97]) に関する単位元となっている．また G のすべての Mackey functor は G のすべての部分群の Burnside functor から誘導されたものの quotient functor になる．この意味において Burnside functor は Mackey functor の理論における最も基本的な対象とみなすことができる．しかしながら，半単純性が成立しない場合 [TW95]，つまり，$|G|$ の約数になっている正標数の体の上での Burnside functor の構造，とりわけ subfunctor lattice (あるいは diagram [BC87]) についてはあまりよく知られていないようである．そこで，今回最も容易な場合，G が巡回 p–群のときの Burnside functor の Loewy 列と socle 列の計算結果について講演させていただいた．ただし，この結果によって直ちに「巡回 p–群の Mackey functor の構造」が究明された訳ではないということを強調しておく．つまり,「部分群の個数だけある射影的な Mackey functor $B^H\uparrow_H^G$ の中のひとつである Burnside functor B^G とその quotient functor に限るならば」という条件が今のところ必要であるということである．

2 Mackey functors

2.1 定義

G で有限群 $\mathcal{O}$ で単位元をもつ可換環とする．G の $\mathcal{O}$ 上の **Mackey functor** M は G のすべての部分群から左 $\mathcal{O}$–加群の圏への対応

$$M : \{\text{subgroups of}\, G\} \longrightarrow \mathcal{O}\text{-mod}$$

と 3 種類の $\mathcal{O}$–準同型

$$\begin{aligned} I_K^H &: M(K) \longrightarrow M(H) \quad \text{(induction)} \\ R_K^H &: M(H) \longrightarrow M(K) \quad \text{(restriction)} \\ c_g^H &: M(H) \longrightarrow M({}^gH) \quad \text{(conjugation)} \quad ({}^gH := gHg^{-1}) \end{aligned}$$

で以下の条件を満たすものである．ただし，ここで $K \leq H$ は G の部分群，$g \in G$ とする．

(0) $I_H^H, R_H^H, c_h^H : M(H) \to M(H)$ はすべての部分群 H および $h \in H$ に対して恒等写像である．

*日本学術振興会特別研究員 (PD), 北海道大学

(1) $R^K_L R^H_K = R^H_L$, $I^H_K I^K_L = I^H_L$ がすべての部分群 $L \leq K \leq H$ に対して成り立つ.

(2) $c^{hH}_g c^H_h = c^H_{gh}$ がすべての部分群 $H \leq G$ と $g, h \in G$ に対して成り立つ.

(3) $R^{gH}_{gK} c^H_g = c^K_g R^H_K$, $I^{gH}_{gK} c^K_g = c^H_g I^H_K$ がすべての部分群 $K \leq H$ と $g \in G$ に対して成り立つ.

(4) $R^H_L I^H_K = \sum_{x \in [L\backslash H/K]} I^L_{L\cap {}^xK} c^{L^x \cap K}_x R^K_{L^x \cap K}$ がすべての部分群 $L, K \leq H$ に対して成り立つ.

Mackey functor M から Mackey functor N への **homomorphism** $\theta = \{\theta_H\}$ は $\mathcal{O}$–準同型

$$\theta_H : M(H) \longrightarrow N(H), \quad \forall H \leq G,$$

の集まりですべての部分群 $K \leq H \leq G$ と $g \in G$ に対して以下の図式を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccc} M(K) & \xrightarrow{\theta_K} & N(K) \\ \downarrow{\scriptstyle I^H_K} & & \downarrow{\scriptstyle I^H_K} \\ M(H) & \xrightarrow{\theta_H} & N(H), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M(K) & \xrightarrow{\theta_K} & N(K) \\ \uparrow{\scriptstyle R^H_K} & & \uparrow{\scriptstyle R^H_K} \\ M(H) & \xrightarrow{\theta_H} & N(H), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M(H) & \xrightarrow{\theta_H} & N(H) \\ \downarrow{\scriptstyle c^H_g} & & \downarrow{\scriptstyle c^H_g} \\ M({}^gH) & \xrightarrow{\theta_{{}^gH}} & N({}^gH). \end{array}$$

2.2 Example

V を $\mathcal{O}G$–加群とする. G の $\mathcal{O}$ 上の **fixed point functor** FP_V は $H \leq G$ に対し V の H 固定点を対応させる

$$FP_V : H \longmapsto V^H := \{ v \in V \,|\, h \cdot v = v \quad \forall h \in H \}$$

と $\mathcal{O}$–準同型

$$\begin{aligned} \tau^H_K \ &: \ FP_V(K) \longrightarrow FP_V(H) \quad \text{(trace)} \\ &; \ v \longmapsto (\sum_{h \in H/K} h) \cdot v, \\ \rho^H_K \ &: \ FP_V(H) \longrightarrow FP_V(K) \quad \text{(inclusion)} \\ &; \ v \longmapsto v, \\ \sigma^H_g \ &: \ FP_V(H) \longrightarrow FP_V({}^gH) \quad \text{(conjugation)} \\ &; \ v \longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

である. ただし, $K \leq H \leq G, g \in G$ とする.

2.3 Mackey algebras

Mackey functors を加群とみなすことのできる代数を定義するために G のすべての部分群を頂点集合とする quiver $\mathcal{Q}$ (有向グラフ) を準備する. 辺は部分群 $K \leq H \leq G$ に対して

$$K\bullet \xrightarrow{I_K^H} \bullet H \quad K\bullet \xleftarrow{R_K^H} \bullet H$$

$g \in G$, $H \leq G$ に対しては

$$H\bullet \xrightarrow{c_g^H} {}^gH$$

と定める.

Λ で $\mathcal{O}$ 上の $\mathcal{Q}$ の path 代数 [Be91] を表す. Mackey functor の定義 (1)–(4) と以下の (0') で生成される Λ のイデアルを J とする.

(0') すべての部分群 $H \leq G$ と $h \in H$ に対して $I_H^H = R_H^H = c_h^H$ は H の長さ 0 のパスとする. このとき Λ/J を G の $\mathcal{O}$ 上の **Mackey algebra** [TW95] と呼び $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ で表す. $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ は自由 $\mathcal{O}$–加群として,

$$\{I_{{}^gL}^K c_g^H R_L^H\}$$

という基底を持つ. ただし, $H, K \leq G$, KgH は G の K と H による両側剰余類を動き L は $H \cap K^g$ の 部分群の $H \cap K^g$–共役類を動く.

2.4 Example

G を位数 2 の巡回群とする.

$$G = \{1, g\}.$$

このとき可換環 $\mathcal{O}$ に対して Mackey algebra $\mu_{\mathcal{O}}(G)$ の基底は,

$$\{c_1^1, c_g^1, I_1^G, R_1^G, I_1^G R_1^G, I_G^G\}$$

となる.

3 Mackey functors and $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules

圏論的な Mackey functors の理論は前節で定義された Mackey algebra 上の加群とみなすことができ, 加群論的な取り扱いが可能になる. この節では, Thévenaz と Webb [TW95] により紹介された Mackey functors の圏と $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules の圏の同値性について述べる.

3.1 Mackey functors から $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules

M を G の $\mathcal{O}$ 上の Mackey functor とする. このとき, $\mathcal{O}$–加群 $\oplus_{H \leq G} M(H)$ は自然に $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群の構造をもつ.

3.2 Example

Example 2.2 の fixed point functor を考える. G として位数 2 の巡回群, $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k, V は 群環 kG とする.

$$FP_{kG} : H \mapsto kG^H.$$

すると, G の部分群に対応する像は

$$FP_{kG} : \begin{cases} 1 & \rightarrow & kG =< u, v | gu = u + v,\ gv = v > \\ G & \rightarrow & k =< w > \end{cases}$$

(ただし, $u = g$, $v = 1 + g = w$) となり, 誘導, 制限, 共役は以下のようになる.

$$I_1^G : \begin{cases} u & \rightarrow & w \\ v & \rightarrow & 0 \end{cases} \quad R_1^G : w \rightarrow v \quad c_g^1 : \begin{cases} u & \rightarrow & u + v \\ v & \rightarrow & v \end{cases} \quad c_g^G : w \rightarrow w.$$

従って, Mackey functor FP_{kG} に対応する $\mu_k(G)$-加群は

$$FP_{kG}(1) \oplus FP_{kG}(G)$$

$$=< u, v, w | I_1^G(u) = w,\ I_1^G(v) = 0,\ R_1^G(w) = v,\ c_g^1(u) = u + v,\ c_g^1(v) = v,\ c_g^G(w) = w >_k$$

となる.

3.3 $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–modules から Mackey functors

A を $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群とする. このとき, 部分群 H に対して

$$M(H) = I_H^H \cdot A$$

と定め, 3 種類の $\mathcal{O}$–準同型 induction, restriction, conjugation をそれぞれ左から Mackey algebra の元 I_K^H, R_H^K, c_g^H をかけることにすると M は Mackey functor になる. 従って, Mackey functors と $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群は同一視できる.

$$M \longleftrightarrow \bigoplus_{H \leq G} M(H).$$

以下, 特に断らない限りそれらを同じ記号で表す; $M = \bigoplus_{H \leq G} M(H)$. また, Mackey algebra 上の加群における sub, simple, projective, injective 等の用語はそのまま, Mackey functor の修飾語としても適用可能であるということを注意する.

3.4 Example

Example 2.4 で $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k を考える. $T =< c_1^1, c_g^1, I_1^G >_k$ は $\mu_k(G)$ の $\mu_k(G)$–部分加群である. このとき T に対応する Mackey functor は

$$T : \begin{cases} 1 & \rightarrow & I_1^1 \cdot T =< c_1^1, c_g^1 >_k \\ G & \rightarrow & I_G^G \cdot T =< I_1^G >_k \end{cases}$$

となり, 誘導, 制限, 共役は以下のようになる.

$$I_1^G : \begin{cases} c_1^1 & \rightarrow & I_1^G c_1^1 = I_1^G \\ c_g^1 & \rightarrow & I_1^G c_g^1 = c_g^G I_1^G = I_1^G, \end{cases} \qquad R_1^G : I_1^G \rightarrow R_1^G I_1^G = c_1^1 + c_g^1,$$

$$c_g^1 : \begin{cases} c_1^1 & \to & c_g^1 c_1^1 = c_g^1 \\ c_g^1 & \to & c_g^1 c_g^1 = c_1^1 \end{cases} \qquad c_g^G : I_1^G \to c_g^G I_1^G = I_1^G.$$

ここで, c_g^1, $c_1^1 + c_g^1$, I_1^G をそれぞれ Example 3.2 の u, v, w に対応させると 2 つの Mackey functors FP_{kG} と T は同型であることがわかる.

4 Simple Mackey functors

Mackey functor の subfunctor lattice の構造を決定する際の最小単位となる simple Mackey functor の分類は, Thévenaz と Webb が行った [TW89]. この節では, その分類を概観する.

4.1 Unique minimal subfunctor FP_V

$\mathcal{O}G$–加群 V の fixed point functor FP_V は unique minimal subfunctor (従って simple Mackey functor)

$$S_{1,V}^G ; H \longmapsto (\sum_{h \in H} h) \cdot V$$

を持つ. ただし, 3 種類の準同型 (induction, restriction, conjugation) は FP_V のそれらと同じもの. 特に

$$S_{1,V}^G(1) = FP_V(1) = V$$

が成り立っている.

4.2 Induction functor

H を G の部分群とする. H の Mackey functor N (induction, restriction, conjugation をそれぞれ, t, r, c とする.) に対して **induction functor** $N\uparrow_H^G$ は G の部分群 K に対して

$$N\uparrow_H^G : K \longmapsto \bigoplus_{KgH \in [K \backslash G/H]} N({}^gK \cap H)$$

と定めて得られる G の Mackey functor である. ただし,

$$x = \sum_{KgH \in [K \backslash G/H]} x_g \in \bigoplus_{KgH \in [K \backslash G/H]} N({}^gK \cap H) = N\uparrow_H^G (K),$$

$L \leq K \leq G$, $y \in N\uparrow_H^G (L)$, $s \in G$ に対し $N\uparrow_H^G$ の 3 種類の準同型 I, R, c は

$$\begin{aligned} R_L^K(x)_g &= r_{H \cap L^g}^{H \cap K^g}(x_g), \\ I_L^K(y)_g &= \sum_{u \in [L \backslash K/K \cap {}^gH]} t_{H \cap L^{ug}}^{H \cap K^{ug}}, \\ c_s^K(x)_g &= x_{s^{-1}g} \end{aligned}$$

とする.

4.3 Inflation functor

N を G の正規部分群 G/N を Q とする. Q の Mackey functor L (induction, restriction, conjugation はそれぞれ t, r, c とする.) に対して **inflation functor** $\mathrm{Inf}_Q^G L$ は, G の部分群 K に対して

$$\mathrm{Inf}_Q^G L(K) = \begin{cases} L(K/N) & \text{if } N \subseteq K \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

さらに, $N \le K \le H$, $g \in G$ のとき $R_K^H = r_{K/N}^{H/N}$, $I_K^H = t_{K/N}^{H/N}$, $c_g^K = c_{gN}^{K/N}$ それ以外はすべて零写像として定まる G の Mackey functor である.

4.4 Simple Mackey functors

NH で H の G における正規化群, $NH/H = WH$ とする. H を G の任意の部分群 V を simple $\mathcal{O}WH$–加群とする. V の WH における fixed point functor FP_V の unique minimal subfunctor $S_{1,V}^{WH}$ の NH への inflation functor を G まで誘導した induction functor を $S_{H,V}^G$ とする;

$$S_{H,V} := S_{H,V}^G = (\mathrm{Inf}_{WH}^{NH} S_{1,V}^{WH}) \uparrow_{NH}^G .$$

Theorem 4.1 (Thévenaz-Webb) $S_{H,V}$ は G の $\mathcal{O}$ 上の *simple Mackey functor* である. さらに, $\{S_{H,V} \mid (H,V)$ はG–共役類の代表元$\}$ は G の $\mathcal{O}$ 上の *simple Mackey functor* の完全代表系である.

よく用いられる simple Mackey functor の性質のひとつを挙げておく.

Lemma 4.2 $S_{H,V}$ を G の *simple Mackey functor, K* を G の部分群とすると

$$S_{H,V}(K) = \begin{cases} V & \text{if } H =_G K \\ 0 & \text{if } H <_G K \end{cases}$$

が成り立つ.

4.5 Simple Mackey functors for cyclic p-group

この節では, G として素数べき位数 p^n の有限巡回 p–群 C_{p^n}, $\mathcal{O}$ として標数 p の体 k の場合の simple Mackey functor について述べる. モジュラー表現論の基本的な事実から, p–群の k 上の既約加群は自明なもの k だけである. 従って C_{p^n} の位数 p^i の部分群 C_{p^i} に対して $WC_{p^i} \cong C_{p^{n-i}}$ の既約加群も k のみである. 従って, C_{p^n} の k 上の simple Mackey functors の完全代表系は Theorem 4.1 から $n+1$ 個の

$$S_{1,k}, S_{C_p,k}, S_{C_{p^2},k}, \cdots, S_{C_{p^{n-1}},k}, S_{C_{p^n},k}$$

である.

4.6 Example

G として位数 2 の巡回群, $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k とする. このとき, G の k 上の simple Mackey functors は $S_{1,k}$ と $S_{G,k}$ となる. 簡単な計算から部分群に対するそれらの k–加群としての像が

$$S_{1,k} : \begin{cases} 1 & \to & k \\ G & \to & 0 \end{cases} \qquad S_{G,k} : \begin{cases} 1 & \to & 0 \\ G & \to & k \end{cases}$$

であることがわかる. 一般に

Lemma 4.3 位数 p^n の巡回群 C_{p^n} の 標数 p の体上の *simple Mackey functor* に対して

$$S_{C_{p^i},k}(Q) = \begin{cases} k & (Q = C_{p^i}) \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

が成り立つ.

5 Burnside functors

本来 Burnside functor は G の部分群の Burnside ring から構成されるものであるが, Mackey functor として考える際には環としての構造は無視できるので, $\mathcal{O}$–加群としての構成のみを述べる.

5.1 Burnside ring

Burnside ring は, 圏論的には有限 G–集合の圏の直和と直積に関する Grothendieck ring ということで定義されるが, ここでは, 実際の計算に必要な $\mathcal{O}$–加群としての基底を挙げる. G の $\mathcal{O}$ 上の **Burnside ring** $B(G)$ の $\mathcal{O}$–基底は

$$\{[G/H] \mid \text{ただし、} H \text{ は } G \text{ の部分群の } G\text{–共役類の代表元}\}$$

である.

5.2 Burnside functors

G の $\mathcal{O}$ 上の **Burnside functor** (あるいは Burnside ring Mackey functor) B^G は任意の部分群 H に対し $\mathcal{O}$–加群 $B(H)$ と 3 種類の $\mathcal{O}$–準同型

$$\begin{aligned} t_K^H &: B(K) \longrightarrow B(H) \\ &; [K/J] \longmapsto [H/J] \\ r_K^H &: B(H) \longrightarrow B(K) \\ &; [H/J] \longmapsto \bigcup_{KhJ \in [K \backslash H/J]} [K/(K \cap {}^gJ)] \\ c_g^H &: B(H) \longrightarrow B({}^gH) \\ &; [H/J] \longmapsto [{}^gH/{}^gJ] \end{aligned}$$

である. ただし, $J, K \leq H \leq G$, $g \in G$. 以上により, Burnside functor B^G に対応する $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群

$$B^G = \bigoplus_{H \leq G} B^G(H) = \bigoplus_{H \leq G} B(H)$$

が構成できる.

5.3 Example

G として位数 2 の巡回群, $\mathcal{O}$ としては標数 2 の体 k を考える. このとき Burnside functor B^G の部分群に対する像は

$$B^G : \begin{cases} 1 & \to & B(1) = < [1/1] >_k \\ G & \to & B(G) = < [G/G], [G/1] >_k \end{cases}$$

3 種類の $\mathcal{O}$–準同型, 誘導, 制限, 共役は以下のようになる.

$$I_1^G : [1/1] \mapsto [G/1] \quad R_1^G : \begin{cases} [G/G] & \mapsto & [1/1] \\ [G/1] & \mapsto & 0 \end{cases}$$

$$c_g^1 : [1/1] \mapsto [1/1] \quad c_g^G : \begin{cases} [G/G] & \mapsto & [G/G] \\ [G/1] & \mapsto & [G/1]. \end{cases}$$

6 Mackey algebra and Burnside functors

以下の議論には直接関係ないが, Burnside functors の重要性を示す事実なので Mackey algebra と Burnside functors の関係を挙げる.

Proposition 6.1 (Thévenaz-Webb) G と $\mathcal{O}$ に対して, *Mackey functor* として（従って $\mu_{\mathcal{O}}(G)$–加群として）の同型

$$\mu_{\mathcal{O}}(G) \cong \bigoplus_{(H)} B^H \uparrow_H^G$$

が存在する. ただし, (H) は G の部分群の G–共役類の完全代表系を動く.

この命題から, 任意の Mackey functor はいくつかの部分群の Burnside functor の誘導の直和の剰余加群として得られることがわかる. また, 系として特に Burnside functor B^G が射影的であることがわかる. さらに, 以下の事実が今回の研究の一つの動機になっている.

Theorem 6.2 $\mathcal{O}$ を標数 $p > 0$ の体とする. このとき, G の $\mathcal{O}$ 上の *Burnside functor* B^G が直既約であるための必要十分条件は, G が p–群であることである.

6.1 Example

G が位数 2 の巡回群, k が標数 2 の体のとき, Example 3.2 から fixed point functor FP_{kG} は $\mu_k(G)$-加群として以下のような構造（ Loewy 列）を持つことがわかる.

$$FP_{kG} \cong \begin{array}{c} <u> \\ <w> \\ <v> \end{array} \cong \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array}.$$

ただし $1 = S_{1,k}$, $2 = S_{G,k}$. また, Example 5.3 から Burnside functor B^G は $\mu_k(G)$–加群として以下のようになる.

$$B^G \cong \begin{array}{c} <[G/G]> \\ <[1/1]> \\ <[G/1]> \end{array} \cong \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array}.$$

一般に $FP_{kG} \cong B^1 \uparrow_1^G$ なので, Proposition 6.1 から以下のような G の k 上の Mackey algebra の直既約射影分解が得られる.

$$\mu_k(G) \cong B^1 \uparrow_1^G \oplus B^G \cong \begin{array}{c}1\\2\\1\end{array} \oplus \begin{array}{c}2\\1\\2\end{array}.$$

6.2 Example

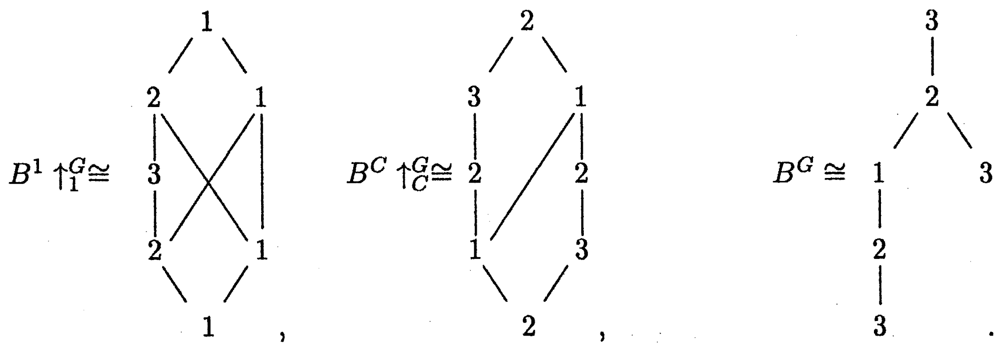
G として位数 4 の巡回群, $\mathcal{O}$ として標数 2 の体 k を考える. このとき, simple Mackey functors は $1 := S_{1,k}$, $2 := S_{C_2,k}$, $3 := S_{G,k}$ となる. C を位数 2 の巡回部分群とすると, 3 つの simple Mackey functors の像は以下のように計算できる.

$$1 : \begin{cases} 1 & \to & k \\ C & \to & 0 \\ G & \to & 0 \end{cases} \quad 2 : \begin{cases} 1 & \to & 0 \\ C & \to & k \\ G & \to & 0 \end{cases} \quad 4 : \begin{cases} 1 & \to & 0 \\ C & \to & 0 \\ G & \to & k. \end{cases}$$

Proposotion 6.1 から Mackey algebra は以下のような分解をもつ.

$$\mu_k(G) \cong B^1 \uparrow_1^G \oplus B^C \uparrow_C^G \oplus B^G.$$

これらの diagram [BC87] は以下のようになる [We98].



この場合 Mackey algebra $\mu_k(G)$ は対称的でも, 自己双対的でもない.

7 Results

この節では主結果を述べる.

7.1 Loewy and socle series

定理を述べる上で必要になる多元環の表現論の基本的な用語を準備する. A で体 k 上有限生成な多元環とする. このとき, 左 A–加群 V の **radical** $\mathrm{Rad}(V)$ は V のすべての極大部分加群の共通部分である. V の **Loewy series** は帰納的に

$$\mathrm{Rad}^0(V) = V, \quad \mathrm{Rad}^i(V) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}^{i-1}(V)),$$

とする. 第 i 番目の **Loewy layer** は $\mathrm{Rad}^{i-1}(V)/\mathrm{Rad}^i(V)$ である.

V の **socle** $\mathrm{Soc}(V)$ は V のすべての既約部分加群の和である. V の **socle layers** は帰納的に

$$\mathrm{Soc}^0(V) = 0, \quad \mathrm{Soc}^i(V)/\mathrm{Soc}^{i-1}(V) = \mathrm{Soc}(V/\mathrm{Soc}^{i-1}(V))$$

とする. 第 i 番目の socle layer とは $\mathrm{Soc}^i(V)/\mathrm{Soc}^{i-1}(V)$ である.

7.2 Uniserial quotient functor

以下 $\mathcal{O}$ として標数 $p > 0$ の体 k を固定する.

Lemma 7.1 任意の $0 \leq i \leq n$ に対して位数 p^n の巡回群 C_{p^n} の k 上の *Burnside functor* $B^{C_{p^n}}$ の *subfunctor* (従って $\mu_k(C_{p^n})$-部分加群) S_i で

$$S_{i+1}/S_i \cong \begin{array}{c} S_{C_{p^i},k} \\ S_{C_{p^{i+1}},k} \\ \vdots \\ S_{C_{p^n},k} \end{array}$$

を満たすものが存在する. ただし, $S_{n+1} = 0$ とする.

Proof. C_{p^n} の部分群 P に対して

$$S_i : P \longmapsto < [P/Q] \,|\, Q \leq C_{p^i} >_k$$

で S_i を定める. また, 3 種類の k-準同型 induction, restriction, conjugation は $B^{C_{p^n}}$ と同じものとすると Lemma 4.3 より従う. ∎

7.3 Results

Theorem 7.2 B を位数 p^n の巡回群の標数 p の体上の *Burnside functor* とする. このとき, B の第 i–番目の *Lowey layer* は

$$\mathrm{Rad}^{\,i}(B)/\mathrm{Rad}^{\,i+1}(B) \cong \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{j=0}^{\frac{n-|n-i|}{2}} S_{C_{p^{|n-i|+2j}},k} & \text{if } i : \text{even}, \\ \displaystyle\bigoplus_{j=0}^{\frac{n-1-|n-i|}{2}} S_{C_{p^{|n-i|+2j}},k} & \text{if } i : \text{odd}. \end{cases}$$

である. ただし, $0 \leq i \leq 2n$.

Proof. Lemma 7.1 を繰り返して $B^{C_{p^n}}$ の diagram [BC87] を得る. 上から Lowey layer の simple Mackey functors を数え上げる. ∎

Theorem 7.3 B を位数 p^n の巡回群の標数 p の体上の *Burnside functor* とする. このとき, B の第 i–番目の *socle layer* は

$$\mathrm{Soc}^{i+1}(B)/\mathrm{Soc}^i(B) \cong \begin{cases} (n-1)S_{C_{p^{n-i}},k} & 0 \leq i \leq n-1, \\ S_{C_{p^{i-n}},k} & n \leq i \leq 2n. \end{cases}$$

である.

Proof. Theorem 7.2 と同様に下から socle layer の simple Mackey functors を数え上げる. ∎

Corollary 7.4 (i) B の *Loewy length* は $2n+1$.
(ii) C_{p^n} の *Burnside functor* が *self-dual* であるための必要十分条件は $n=1$.

Proof. 定理より明らか. ∎

参考文献

[Be91] D.J. BENSON, *Representations and cohomology I,* Cambridge University Press 1991.

[BC87] D.J. BENSON AND J.F. CARLSON, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology,* Comm. in Algebra **15** 1987.

[Bo97] S. BOUC, *Green Functors and G-sets,* Lecture Notes in Mathematics **1671**, Springer-Verlag 1997.

[Dr75] A.W.M. DRESS, *Contributions to the theory of induced representations* In:*Algebraic K-theory II*, Proc. Batelle Institute Conference 1972 (Ed. H. Bass) Lecture Notes in Mathematics **342**, 183-240, Springer-Verlag 1973.

[Le81] L. G. LEWIS, JR., The theory of Green functors, Unpublished notes, 1981.

[Lu96] F. LUCA, The Algebra of Green and Mackey Functors, Ph.D. dissertation, UAF , 1996.

[TW89] J. THÉVENAZ and P.J. WEBB, Simple Mackey functors, Proc. of 2nd International Group Theory Conference, Bressanone (1989), Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 23, 1990, pp. 299-319.

[TW95] J. THÉVENAZ and P.J. WEBB, The structure of Mackey functors, Trans. A.M.S. **347** (1995), 1865-1961.

[We98] P.J. WEBB, private communication.